رياضيات ٤ (8) الدرجة: 100

جامعة البعث — سلم تصحيح مقرر علم المرونة
كلية العلوم — رابعة رياضيات (ميكانيك)
قسم الرياضيات — الفصل الأول للعام الدراسي ٢٠١٦ - ٢٠١٧م

السؤال الأول: (40)

١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨
أ	أ	أ	ب	ب	ب	ج	ج
5	5	5	5	5	5	5	5

السؤال الثاني: (30)

أولاً:

العلاقة التي تعطي مصفوفة الانتقالات اللاغرانجية المتعلقة بالجملة $Ox_1x_2x_3$، بدلالة المشتقات الجزئية لـ $z_i(p;t)$ $(i=1,2,3)$ بالنسبة لـ x_j $(j=1,2,3)$ هي:

$$* \quad e_{jk}(p;t)=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial z_i}{\partial x_j}(p;t)\cdot\frac{\partial z_i}{\partial x_k}(p;t)-\delta_{jk}\right],\ j,k=1,2,3$$

لدينا: $u_i(p;t)=z_i(p;t)-x_i$ $(i=1,2,3)$ وبالتالي $z_i(p;t)=u_i(p;t)+x_i$

باشتقاق طرفي العلاقة السابقة جزئياً بالنسبة لـ x_j نجد: $\frac{\partial z_i}{\partial x_j}(p;t)=\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(p;t)+\delta_{ij}$،

وبنفس الطريقة نجد أن: $\frac{\partial z_i}{\partial x_k}(p;t)=\frac{\partial u_i}{\partial x_k}(p;t)+\delta_{ik}$. بتعويض العلاقتين السابقتين في * نجد

$$e_{jk}(p;t)=\frac{1}{2}\left\{\left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(p;t)+\delta_{ij}\right]\left[\frac{\partial u_i}{\partial x_k}(p;t)+\delta_{ik}\right]-\delta_{jk}\right\}$$

وباستخدام خواص التفاضل وجمع الدلالة المكررة تصبح العلاقة السابقة بالشكل:

$$e_{jk}(p;t)=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(p;t)\delta_{ik}+\frac{\partial u_i}{\partial x_k}(p;t)\delta_{ij}+\delta_{ij}\delta_{ik}+\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(p;t)\frac{\partial u_i}{\partial x_k}(p;t)-\delta_{jk}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_k}{\partial x_j}(p;t)+\frac{\partial u_j}{\partial x_k}(p;t)+\delta_{kj}+\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(p;t)\frac{\partial u_i}{\partial x_k}(p;t)-\delta_{jk}\right]$$

بالتالي:

$$e_{jk}(p;t)=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_j}{\partial x_k}(p;t)+\frac{\partial u_k}{\partial x_j}(p;t)+\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(p;t)\cdot\frac{\partial u_i}{\partial x_k}(p;t)\right]$$

$j,k=1,2,3$

وهي العلاقة المطلوبة.

12

ثانياً:

$$0=\lambda_{11}=-1+\sqrt{1+2e_{11}(p_1;t_1)} \Rightarrow e_{11}(p_1;t_1)=0,\quad -1+\frac{2}{\sqrt5}=\lambda_{22}=-1+\sqrt{1+2e_{22}(p_1;t_1)}$$

$$\Rightarrow e_{22}(p_1;t_1)=-\frac{1}{10}$$

$$0=\lambda_{33}=-1+\sqrt{1+2e_{33}(p_1;t_1)} \Rightarrow e_{33}(p_1;t_1)=0$$

$$\frac{\sqrt5}{13}=\cos\varphi^*(1,2)=\frac{2e_{12}(p_1;t_1)}{(1+\lambda_{11})(1+\lambda_{22})} \Rightarrow e_{12}(p_1;t_1)=\frac12(1+\lambda_{11})(1+\lambda_{22})\cos\varphi^*(1,2)$$

$$=\frac12\times1\times\frac{2}{\sqrt5}\times\frac{\sqrt5}{13}=\frac{1}{13}\overset{\text{تناظر}}{=}e_{21}(p_1;t_1)$$

$$-\frac{2}{15}=\cos\varphi^*(1,3)=\frac{2e_{13}(p_1;t_1)}{(1+\lambda_{11})(1+\lambda_{33})} \Rightarrow e_{13}(p_1;t_1)=\frac12(1+\lambda_{11})(1+\lambda_{33})\cos\varphi^*(1,3)$$

$$=\frac12\times1\times1\times-\frac{2}{15}=-\frac{1}{15}\overset{\text{تناظر}}{=}e_{31}(p_1;t_1)$$

$$\frac{\sqrt5}{17}=\cos\varphi^*(2,3)=\frac{2e_{23}(p_1;t_1)}{(1+\lambda_{22})(1+\lambda_{33})} \Rightarrow e_{23}=\frac12(1+\lambda_{22})(1+\lambda_{33})\cos\varphi^*(2,3)$$

$$=\frac12\times\frac{2}{\sqrt5}\times1\times\frac{\sqrt5}{17}=\frac{1}{17}\overset{\text{التناظر}}{=}e_{32}(p_1;t_1)$$

18

السؤال الثالث: (30)

لحل المعادلات $\xi_i = \xi_i(p,t)$ $(i=1,2,3)$ حلاً مشتركاً بالنسبة لـ x_i، نستخدم طريقة كرامر. لدينا: معين الجملة:

$$\Delta = \begin{vmatrix} ch3t & sh3t & 0 \\ sh3t & ch3t & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{vmatrix}$$

$$\Delta = 1 \times e^{-3t} = e^{-3t}$$

$$x_1 = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} \xi_1 & sh3t & 0 \\ \xi_2 & ch3t & 0 \\ \xi_3 & 0 & e^{-3t} \end{vmatrix} = 1(\xi_1 ch3t - \xi_2 sh3t)$$

$$= \xi_1 ch3t - \xi_2 sh3t = x_1(p;t)$$

$$x_2 = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} ch3t & \xi_1 & 0 \\ sh3t & \xi_2 & 0 \\ 0 & \xi_3 & e^{-3t} \end{vmatrix} = 1(\xi_2 ch3t - \xi_1 sh3t)$$

6 $$= -\xi_1 sh3t + \xi_2 ch3t = x_2(p;t)$$

وبالمعادلة الثالثة مباشرة نجد:

$$x_3 = e^{3t}\xi_3 = x_3(p;t)$$

لدينا مركبات الانتقال الذاكرية لنقطة الدراسة $\vec{u}(p;t)$ هي:

$$u_i(p;t) = \xi_i - x_i(p;t)\ ;\ i = 1,2,3$$

$$u_1(p,t) = \xi_1 - x_1(p,t) = \xi_1 - (\xi_1 ch3t - \xi_2 sh3t) = \xi_1(1-ch3t) + \xi_2 sh$$

$$u_2(p;t) = \xi_2 - x_2(p;t) = \xi_2 - (\xi_1 sh3t + \xi_2 ch3t) = -\xi_1 sh3t + \xi_2(1-ch$$

9 $$u_3(p;t) = \xi_3 - x_3(p;t) = \xi_3 - \xi_3 e^{3t} = \xi_3(1-e^{3t})$$

(4- نعطي مصفوفة التشوهات الأولية المتعلقة بالجملة $Ox_1x_2x_3$ ←

$$\eta_{jk}(p,t) = \frac{1}{2}\left[\delta_{jk} - \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j}(p;t)\,\frac{\partial x_i}{\partial \xi_k}(p,t)\right],\ j,k=1,2,$$

لنحسب عناصر القطر الرئيسي لهذه المصفوفة هي:

$$\eta_{11}(p,t) = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{\partial x_i}{\partial \xi_1}(p;t)\cdot\frac{\partial x_i}{\partial \xi_1}(p,t)\right] = \frac{1}{2}\left[1-(ch^2 3t + sh^2 3t + 0^2)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\times(-2sh^2 3t) = -sh^2 3t$$

$$\eta_{22}(p,t) = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{\partial x_i}{\partial \xi_2}(p,t)\cdot\frac{\partial x_i}{\partial \xi_2}(p,t)\right] = \frac{1}{2}\left[1-(sh^2 3t + ch^2 3t + 0^2)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\times(-2sh^2 3t) = -sh^2 3t$$

$$\eta_{33}(p;t) = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{\partial x_i}{\partial \xi_3}(p;t)\cdot\frac{\partial x_i}{\partial \xi_3}(p;t)\right] = \frac{1}{2}\left[1-(0^2+0^2+e^{6t})\right] = \frac{1}{2}(1-e^{6t})$$

15

مدرس المقرر:

د. منتجب حسن